

Elektronen im periodischen Potential

Christoph Würstle

Geleitet von:

Peter Schwab und Michael Gruber
Theoretische Physik II
University of Augsburg

Seminar zur Quantenmechanik

1 Motivation

- Bedeutung der Elektronen im Festkörper

2 Kronig-Penney-Modell

- Wiederholung der Herleitung des Kronig-Penney-Modells
- Diskussion der Ergebnisgleichung

3 Erhöhung der Dimension

- Herleitung
- Beispiel
- Diskussion

4 Elektronen im schwachen Potential

- Definition, Realistisch?
- Bloch-Theorem, Fourierreihe
- Anwendung für freies Elektron
- Anwendung für 2 Elektronenniveaus

1 Motivation

- Bedeutung der Elektronen im Festkörper

2 Kronig-Penney-Modell

- Wiederholung der Herleitung des Kronig-Penney-Modells
- Diskussion der Ergebnisgleichung

3 Erhöhung der Dimension

- Herleitung
- Beispiel
- Diskussion

4 Elektronen im schwachen Potential

- Definition, Realistisch?
- Bloch-Theorem, Fourierreihe
- Anwendung für freies Elektron
- Anwendung für 2 Elektronenniveaus

Was lässt sich durch das Verhalten der Elektronen im Festkörper verstehen?

Bedeutung der Elektronen

Die Physik von Festkörpern wird hauptsächlich durch die Elektronen bestimmt.

Beispiele

- Bandstruktur von Festkörpern \Leftrightarrow Isolator, Halbleiter, Leiter
- Chemische Bindungseigenschaften (Fermioberfläche)
- Optische Eigenschaften wie die Farbe
- Elektronen tragen auch zur Wärmeleitfähigkeit bei, wichtiger dabei aber Phononen \Rightarrow Vortrag nächste Woche.

Outline

- 1 Motivation
 - Bedeutung der Elektronen im Festkörper
- 2 **Kronig-Penney-Modell**
 - **Wiederholung der Herleitung des Kronig-Penney-Modells**
 - Diskussion der Ergebnisgleichung
- 3 Erhöhung der Dimension
 - Herleitung
 - Beispiel
 - Diskussion
- 4 Elektronen im schwachen Potential
 - Definition, Realistisch?
 - Bloch-Theorem, Fourierreihe
 - Anwendung für freies Elektron
 - Anwendung für 2 Elektronenniveaus

Wiederholung der Herleitung

Fragestellung

Elektronen im Festkörper spüren ein periodisches Potential, das im Grenzfall einem δ -Potential ($V(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \nu \delta(x - na)$) gleicht. Welche charakteristischen Eigenschaften lassen sich aus diesem (analytisch lösbaren) Grenzfall schließen?

Vorgehen

- Bloch-Theorem
- Ansatz
- Lösung

Bloch-Theorem

Bloch-Theorem

Die Eigenzustände ψ des Ein-Elektronen-Hamiltonian lassen sich schreiben als:

$$\psi_{nk}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} u_{nk}(\mathbf{x})$$

wobei $u_{nk}(\mathbf{x} + \mathbf{a}) = u_{nk}(\mathbf{x})$

Alternative Schreibweise

$$\psi(\mathbf{x} + \mathbf{a}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}} \psi(\mathbf{x})$$

Hinweis: Ein-Elektronen-Hamiltonian

$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} + U(\mathbf{x})$ mit $U(\mathbf{x} + \mathbf{a}) = U(\mathbf{x})$ und $\mathbf{a} \equiv$ Gitterperiode

Mit dem Ansatz

$$\psi(x) = A_n e^{iq(x-na)} + B_n e^{-iq(x-na)}$$

wobei gilt:

$$A_{n+1} = e^{ika} A_n \quad \text{und} \quad B_{n+1} = e^{ika} B_n$$

kommt man mit Hilfe der Stetigkeits- und Sprungbedingung auf

$$\begin{pmatrix} e^{iqa} - e^{ika} & e^{-iqa} - e^{ika} \\ iq(e^{ika} - e^{iqa}) - \frac{2mv}{\hbar^2} e^{iqa} & iq(-e^{ika} + e^{-iqa}) - \frac{2mv}{\hbar^2} e^{iqa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = 0$$

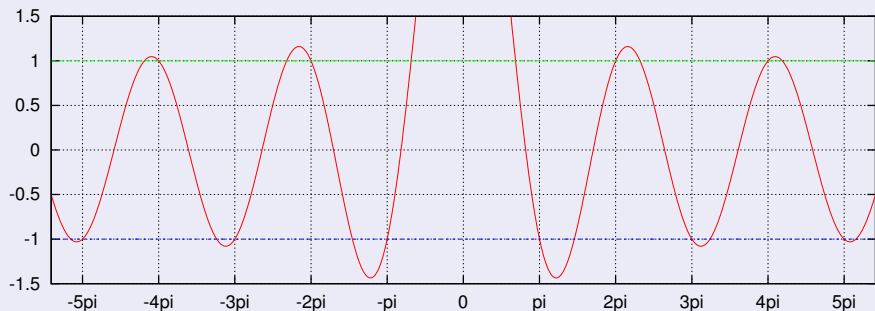
wobei die Determinante der Matrix für eine nichttriviale Lösung verschwinden muss.

Ergebnis

Lösungsbedingung

$$\cos(ka) = \cos(qa) + \frac{mv}{q\hbar^2} \sin(qa) \quad (1)$$

Veranschaulichung



Outline

1

Motivation

- Bedeutung der Elektronen im Festkörper

2

Kronig-Penney-Modell

- Wiederholung der Herleitung des Kronig-Penney-Modells
- **Diskussion der Ergebnisgleichung**

3

Erhöhung der Dimension

- Herleitung
- Beispiel
- Diskussion

4

Elektronen im schwachen Potential

- Definition, Realistisch?
- Bloch-Theorem, Fourierreihe
- Anwendung für freies Elektron
- Anwendung für 2 Elektronenniveaus

Umformen von (1)

$$\cos(ka) = \cos(qa) + \frac{mv}{\hbar^2 q} \sin(qa)$$

mit Hilfe von $s := qa$ und $c := \frac{mva}{\hbar^2}$ in

$$\cos(s) + \frac{c}{s} \sin(s) =: f(s)$$

Umformen von (1)

$$\cos(ka) = \cos(qa) + \frac{mv}{\hbar^2 q} \sin(qa)$$

mit Hilfe von $s := qa$ und $c := \frac{mva}{\hbar^2}$ in

$$\cos(s) + \frac{c}{s} \sin(s) =: f(s)$$

Eigenschaften

- $f(0) = 1 + c$ (im Grenzwert)

Umformen von (1)

$$\cos(ka) = \cos(qa) + \frac{mv}{\hbar^2 q} \sin(qa)$$

mit Hilfe von $s := qa$ und $c := \frac{mva}{\hbar^2}$ in

$$\cos(s) + \frac{c}{s} \sin(s) =: f(s)$$

Eigenschaften

- $f(0) = 1 + c$ (im Grenzwert)
- $f(n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$; ($n \neq 0$)
⇔ Grenzen zwischen erlaubten Bereichen und verbotenen Zonen

Was wissen wir?

- Jeder verbotene Bereich beginnt bei Vielfachem von π .
- Für das Ende ist die Berechnung analytisch nicht möglich
⇒ Entwicklung (Tafel).

Was wissen wir?

- Jeder verbotene Bereich beginnt bei Vielfachem von π .
- Für das Ende ist die Berechnung analytisch nicht möglich
⇒ Entwicklung (Tafel).
- Ergebnis: $aq_n = n\pi + \frac{2c}{n\pi}$

Was wissen wir?

- Jeder verbotene Bereich beginnt bei Vielfachem von π .
- Für das Ende ist die Berechnung analytisch nicht möglich
⇒ Entwicklung (Tafel).
- Ergebnis: $aq_n = n\pi + \frac{2c}{n\pi}$
- Bandlücken:

$$\Delta E_n = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \left(4c + \frac{4c^2}{(\pi n)^2} \right) > 0$$

Bandlückengröße

Was wissen wir?

- Jeder verbotene Bereich beginnt bei Vielfachem von π .
- Für das Ende ist die Berechnung analytisch nicht möglich
⇒ Entwicklung (Tafel).
- Ergebnis: $aq_n = n\pi + \frac{2c}{n\pi}$
- Bandlücken:

$$\Delta E_n = \frac{\hbar}{2ma^2} \left(4c + \frac{4c^2}{(\pi n)^2} \right) > 0$$

Physikalisches? Unphysikalisches?

- Wir haben Bänder 'entdeckt', dadurch lassen sich viele Dinge verstehen!

Bandlückengröße

Was wissen wir?

- Jeder verbotene Bereich beginnt bei Vielfachem von π .
- Für das Ende ist die Berechnung analytisch nicht möglich
⇒ Entwicklung (Tafel).
- Ergebnis: $aq_n = n\pi + \frac{2c}{n\pi}$
- Bandlücken:

$$\Delta E_n = \frac{\hbar}{2ma^2} \left(4c + \frac{4c^2}{(\pi n)^2} \right) > 0$$

Physikalisches? Unphysikalisches?

- Wir haben Bänder 'entdeckt', dadurch lassen sich viele Dinge verstehen!
- Die Bandlücken gehen bis unendlich! Nicht gut!
⇒ Kronig-Penney-Modell mehrdimensional!

- 1 Motivation
 - Bedeutung der Elektronen im Festkörper
- 2 Kronig-Penney-Modell
 - Wiederholung der Herleitung des Kronig-Penney-Modells
 - Diskussion der Ergebnisgleichung
- 3 **Erhöhung der Dimension**
 - **Herleitung**
 - Beispiel
 - Diskussion
- 4 Elektronen im schwachen Potential
 - Definition, Realistisch?
 - Bloch-Theorem, Fourierreihe
 - Anwendung für freies Elektron
 - Anwendung für 2 Elektronenniveaus

mehrdimensionales Kronig-Penney-Modell

Wir definieren uns folgenden Hamiltonian:

$$H = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \nu \delta(r_i - na_i) = H_x + H_y + H_z$$

mehrdimensionales Kronig-Penney-Modell

Wir definieren uns folgenden Hamiltonian:

$$H = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \nu \delta(r_i - na_i) = H_x + H_y + H_z$$

- Wir kennen das Ergebnis für den eindimensionalen Hamiltonian.

mehrdimensionales Kronig-Penney-Modell

Wir definieren uns folgenden Hamiltonian:

$$H = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \nu \delta(r_i - na_i) = H_x + H_y + H_z$$

- Wir kennen das Ergebnis für den eindimensionalen Hamiltonian.
- Wie erkennen wir nun, wie sich die Energien überlappen?

mehrdimensionales Kronig-Penney-Modell

Wir definieren uns folgenden Hamiltonian:

$$H = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \nu \delta(r_i - na_i) = H_x + H_y + H_z$$

- Wir kennen das Ergebnis für den eindimensionalen Hamiltonian.
- Wie erkennen wir nun, wie sich die Energien überlappen? Die Hamiltonians addieren sich $\Rightarrow E_x + E_y + E_z$
Dabei sind die Energien die, die bereits aus einer Dimension bekannt sind.

1 Motivation

- Bedeutung der Elektronen im Festkörper

2 Kronig-Penney-Modell

- Wiederholung der Herleitung des Kronig-Penney-Modells
- Diskussion der Ergebnisgleichung

3 Erhöhung der Dimension

- Herleitung
- **Beispiel**
- Diskussion

4 Elektronen im schwachen Potential

- Definition, Realistisch?
- Bloch-Theorem, Fourierreihe
- Anwendung für freies Elektron
- Anwendung für 2 Elektronenniveaus

Beispiel für Bänder

- Wir nehmen ein Potential an, das uns folgende Bänder liefert (in einer Dimension!):
- Breite verbotener Bereich: $4 * 0,75 = 3$;
- 1. Erlaubter Bereich endet bei: $4 * 1^2 = 4$;
- 2. Erlaubter Bereich endet bei: $4 * 2^2 = 4 * 4 = 16$;
- 3. Erlaubter Bereich endet bei: $4 * 3^2 = 4 * 9 = 36$;

Erinnerung

- Bandlücken: $\Delta E_n = \frac{\hbar}{2ma^2} \left(4c + \frac{4c^2}{(\pi n)^2} \right) \approx \frac{\hbar}{ma^2} (2c)$
- Verbotener Bereich beginnt immer bei $const * n^2$ (hier $4 * n^2$).
- \Rightarrow Tafel

1 Motivation

- Bedeutung der Elektronen im Festkörper

2 Kronig-Penney-Modell

- Wiederholung der Herleitung des Kronig-Penney-Modells
- Diskussion der Ergebnisgleichung

3 Erhöhung der Dimension

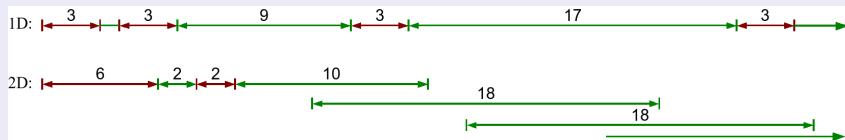
- Herleitung
- Beispiel
- **Diskussion**

4 Elektronen im schwachen Potential

- Definition, Realistisch?
- Bloch-Theorem, Fourierreihe
- Anwendung für freies Elektron
- Anwendung für 2 Elektronenniveaus

Die Bänder überlappen sich, werden so unendlich breit

Überlappen der Bänder



Ergebnisse

- Bänder überlappen sich, ab einer bestimmten Energie treten keine verbotenen Bereiche mehr auf.
- Realistischer als in einer Dimension

1 Motivation

- Bedeutung der Elektronen im Festkörper

2 Kronig-Penney-Modell

- Wiederholung der Herleitung des Kronig-Penney-Modells
- Diskussion der Ergebnisgleichung

3 Erhöhung der Dimension

- Herleitung
- Beispiel
- Diskussion

4 Elektronen im schwachen Potential

- **Definition, Realistisch?**
- Bloch-Theorem, Fourierreihe
- Anwendung für freies Elektron
- Anwendung für 2 Elektronenniveaus

Modell der fast freien Elektronen

Wir nehmen an, dass sich Leitungselektronen fast wie freie Elektronen verhalten und nur ein sehr schwaches Potential spüren.

Modell der fast freien Elektronen

Wir nehmen an, dass sich Leitungselektronen fast wie freie Elektronen verhalten und nur ein sehr schwaches Potential spüren.

Folgerung

Freie Elektronen gewinnen/verlieren (je nach Potential) dadurch maximal die Energie des Potentials U (vgl. Bild, Tafel).

Realistisch?

Die Annahme mag sehr unrealistisch klingen.

Aber es hat sich gezeigt, dass sie für Metalle insbesondere der I. und II. Gruppe gute Ergebnisse liefert.

D.h. also für Elemente, die nur wenig mehr Elektronen haben, als eine Edelgaskonfiguration.

Realistisch?

Die Annahme mag sehr unrealistisch klingen.

Aber es hat sich gezeigt, dass sie für Metalle insbesondere der I. und II. Gruppe gute Ergebnisse liefert.

D.h. also für Elemente, die nur wenig mehr Elektronen haben, als eine Edelgaskonfiguration.

Woher kommt das?

- Die Coulombkraft ist nur bei kurzen Abständen sehr stark. Den Leitungselektronen ist es aber wegen des Pauliverbots nicht möglich in die unmittelbare Nähe der Ionen zu kommen.
- In dem Bereich, in dem die Leitungselektronen sich aufhalten, schirmen sie gegenseitig das noch existierende Potential etwas ab.

1 Motivation

- Bedeutung der Elektronen im Festkörper

2 Kronig-Penney-Modell

- Wiederholung der Herleitung des Kronig-Penney-Modells
- Diskussion der Ergebnisgleichung

3 Erhöhung der Dimension

- Herleitung
- Beispiel
- Diskussion

4 Elektronen im schwachen Potential

- Definition, Realistisch?
- **Bloch-Theorem, Fourierreihe**
- Anwendung für freies Elektron
- Anwendung für 2 Elektronenniveaus

Wir entwickeln die ebenen Wellen mit einer Fouriertransformation:

$$\psi(r) = \int_{-\infty}^{\infty} c_q e^{iqr} dq$$

Bloch-Theorem, Fourierreihe

Wir entwickeln die ebenen Wellen mit einer Fouriertransformation:

$$\psi(r) = \int_{-\infty}^{\infty} c_q e^{iqr} dq$$

Das Potential ist periodisch und kann somit als Fourierreihe entwickelt werden:

$$U(r) = \sum_K U_K e^{iKr}$$

Dabei sind K die reziproken Gittervektoren,
 U_K die Fourierkoeffizienten: $U_K = \frac{1}{v} \int_{\text{Zelle}} U(r) e^{-iKr} dr$

Bloch-Theorem, Schrödinger-Gleichung 1

Alles in Schrödinger-Gleichung einsetzen (\Rightarrow Tafel) ergibt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} - \varepsilon \right) c_q + \sum_{K'} U_{K'} c_{q-K'} \right\} e^{iqr} dq = 0$$

Bloch-Theorem, Schrödingergleichung 1

Alles in Schrödingergleichung einsetzen (\Rightarrow Tafel) ergibt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} - \varepsilon \right) c_q + \sum_{K'} U_{K'} c_{q-K'} \right\} e^{iqr} dq = 0$$

Da die ebenen Wellen (e^{iqr}) orthogonal sind, muss die Klammer für jedes q Null ergeben, d.h.:

$$\left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} - \varepsilon \right) c_q + \sum_{K'} U_{K'} c_{q-K'} = 0$$

Variablenumbenennungen (Tafel)

Umbenennung von $q = k - K$, wobei K der reziproke Gittervektor ist, so dass k in der 1. Brillouin-Zone liegt (reduziertes Zonenschema und anschließend wird noch $K' \rightarrow K' - K$ substituiert, so dass sich

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m} (k - K)^2 - \varepsilon \right] c_{k-K} + \sum_{K'} U_{K'-K} c_{k-K'} = 0 \quad (2)$$

ergibt.

Was ist passiert?

- Wir haben die Schrödinger-Gleichung umgeformt.
- Für festes k haben die Koeffizienten c_q nur q -Werte die von k um einen rez. Gittervektor verschieden sind.
- Weiter haben wir das Problem in (unedlich viele) unabhängige Gleichungen separiert (für jedes erlaubte k in der 1. BZ).

Bloch-Theorem, Schrödinger-Gleichung 3

Was ist passiert?

- Wir haben die Schrödinger-Gleichung umgeformt.
- Für festes k haben die Koeffizienten c_q nur q -Werte die von k um einen rez. Gittervektor verschieden sind.
- Weiter haben wir das Problem in (unedlich viele) unabhängige Gleichungen separiert (für jedes erlaubte k in der 1. BZ).

Einsetzen in den ursprünglichen Ansatz ergibt:

$$\psi_k = \sum_K c_{k-K} e^{i(k-K)r} \quad (3)$$

Dies ist die Ausgangsgleichung für die Herleitung der Elektronen im schwachen Potential.

Bloch-Theorem

Wenn wir die Gleichung schreiben als:

$$\psi_k(r) = \left(\sum_K c_{k-K} e^{-iKr} \right) e^{ikr} = u(r) e^{ikr}$$

mit $e^{iKa} = 1$;

Dies ist die Behauptung des Bloch-Theorems.

1 Motivation

- Bedeutung der Elektronen im Festkörper

2 Kronig-Penney-Modell

- Wiederholung der Herleitung des Kronig-Penney-Modells
- Diskussion der Ergebnisgleichung

3 Erhöhung der Dimension

- Herleitung
- Beispiel
- Diskussion

4 Elektronen im schwachen Potential

- Definition, Realistisch?
- Bloch-Theorem, Fourierreihe
- **Anwendung für freies Elektron**
- Anwendung für 2 Elektronenniveaus

Potential $U_K = 0$

Für den Fall des freien Elektrons wird (2) zu

$$(\varepsilon_{k-K}^0 - \varepsilon) c_{k-K} = 0 \quad (4)$$

mit $\varepsilon_q^0 = \frac{\hbar^2 q^2}{2m}$;

Freies Elektron

Potential $U_K = 0$

Für den Fall des freien Elektrons wird (2) zu

$$(\varepsilon_{k-K}^0 - \varepsilon)c_{k-K} = 0 \quad (4)$$

mit $\varepsilon_q^0 = \frac{\hbar^2 q^2}{2m}$;

Lösung

Um (4) zu erfüllen muss entweder $(\varepsilon_{k-K}^0 - \varepsilon) = 0$ oder $c_{k-K} = 0$ sein. Die Klammer ist 0 für ein K ; ansonsten $c_{k-K} = 0$

$$\Rightarrow \psi(r) \propto e^{iqr}$$

\Leftrightarrow Lösung für freies Elektron.

1 Motivation

- Bedeutung der Elektronen im Festkörper

2 Kronig-Penney-Modell

- Wiederholung der Herleitung des Kronig-Penney-Modells
- Diskussion der Ergebnisgleichung

3 Erhöhung der Dimension

- Herleitung
- Beispiel
- Diskussion

4 Elektronen im schwachen Potential

- Definition, Realistisch?
- Bloch-Theorem, Fourierreihe
- Anwendung für freies Elektron
- Anwendung für 2 Elektronenniveaus

2 (bisher) freie Elektronen-Niveaus treffen aufeinander.

2 (bisher) freie Elektronen-Niveaus treffen aufeinander.

Ansatz

(2) wird zu:

$$\begin{aligned}(\varepsilon - \varepsilon_{k-K_1}^0) c_{k-K_1} &= U_{K_2-K_1} c_{k-K_2} \\(\varepsilon - \varepsilon_{k-K_2}^0) c_{k-K_2} &= U_{K_1-K_2} c_{k-K_1}\end{aligned}\tag{5}$$

Vereinfachung der Notation

Variablenvereinfachung

Da wir nur 2 Elektronen betrachten, können wir uns die Notation wieder vereinfachen:

$$q := k - K_1 \quad \text{und} \quad K := K_2 - K_1$$

Vereinfachung der Notation

Variablenvereinfachung

Da wir nur 2 Elektronen betrachten, können wir uns die Notation wieder vereinfachen:

$$q := k - K_1 \quad \text{und} \quad K := K_2 - K_1$$

(5) wird dadurch zu

$$\begin{aligned} (\varepsilon - \varepsilon_q^0) c_q &= U_K c_{q-K} \\ (\varepsilon - \varepsilon_{q-K}^0) c_{q-K} &= U_{-K} c_q = U_K^* c_q \end{aligned} \quad (6)$$

Wobei wir Inversionssymmetrie des Kristalls ($U(r) = U(-r) \Leftrightarrow U_{-K} = U_K^*$) angenommen haben.

Die Gleichungen (6) lassen sich umformen und in folgende Form bringen:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon - \varepsilon_q^0 & -U_K \\ -U_K^* & \varepsilon - \varepsilon_{q-K}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_q \\ c_{q-K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung

Die Gleichungen (6) lassen sich umformen und in folgende Form bringen:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon - \varepsilon_q^0 & -U_K \\ -U_K^* & \varepsilon - \varepsilon_{q-K}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_q \\ c_{q-K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

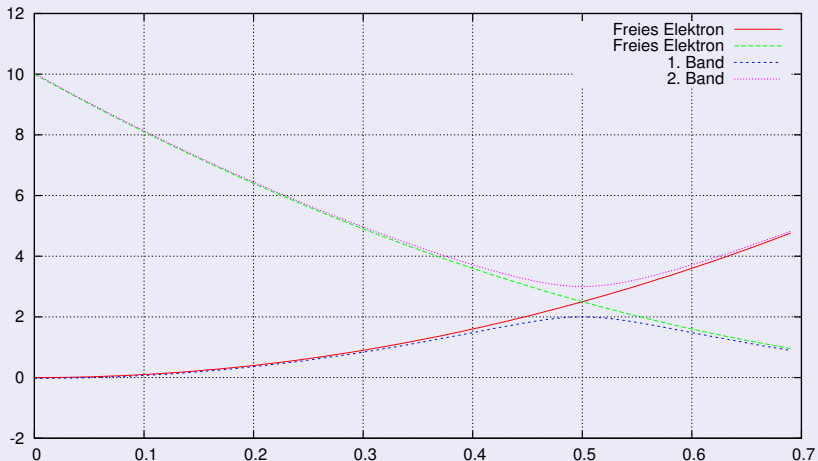
Lösen

Für eine nichttriviale Lösung muss die Determinante verschwinden. Die Lösung der sich ergebenden quadratischen Gleichung lautet:

$$\varepsilon_{1/2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_q^0 + \varepsilon_{q-K}^0) \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_q^0 - \varepsilon_{q-K}^0}{2}\right)^2 + |U_K|^2} \quad (7)$$

Interpretation

Plot der gefundenen Gleichungen



Summary

- Wir haben gezeigt wie **Bänder** entstehen.
- Und dass es in höheren Dimensionen eine Energie gibt, ab der **keine verbotenen Bereiche** mehr auftreten.

- Wir haben gezeigt wie **Bänder** entstehen.
- Und dass es in höheren Dimensionen eine Energie gibt, ab der **keine verbotenen Bereiche** mehr auftreten.

- Weitere Möglichkeiten der Bänderberechnung
 - ▶ Tight-Binding-Modell
 - ▶ Augmented Plane Wave (APW) Method



Ashcroft-Mermin

Solid State Physics

Kapitel 8 und 9



Gordon Baym

Lectures on Quantum Mechanics

Kapitel 4



PDF Runterladen

www.axique.de/physics/ElektronenImPerPotential.pdf

oder www.axique.de → Physik → Vortrag Elektronen im periodischen Potential